УДК 511.331 + 510.6 + 514.17 MSC 2020: 11M26, 03B35, 14G10, 05C50, 46L87

2026_11_17_АКСИОМАТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА К ПРИНЦИПУ ПРИЧИННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ И ЛОРЕНЦЕВОЙ СИГНАТУРЕ: ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА *T*_ATNS-4.0 В СТАНДАРТЕ Н. БУРБАКИ И ЕЁ ВЕРИФИКАЦИЯ В LEAN 4

С. В. Грисюк, *GTP Lab, www.gtpglobals.com, октябрь-ноябрь 2026 года, Алматы, Казахстан (формально-логический аудит и подготовка спецификации Lean 4 выполнены в категориально-дедуктивной системе Эйдос)*

Аннотация

В работе представлена формальная дедуктивная система *TATNS-4.0 = ⟨L_4, A_4, R_4⟩, построенная в аксиоматическом стандарте Н. Бурбаки, в рамках которой аналог гипотезы Римана о локализации нетривиальных нулей спектральной функции на критической прямой Re(ρ) = 1/2 выводится из тополого-алгебраического принципа необратимого причинного разделения. Отправной точкой служит структурная интерпретация простых элементов как точек качественного перехода в дискретной эволюции и редукция задачи к критерию положительности функционала Вейля. Доказана теорема об исключении индефинитной сигнатуры типа (2, −) на произвольном (в том числе бесконечномерном) вещественном пространстве информационных циклов $D\mathbb{R}$: расщепление положительного конуса симметричной билинейной формы $I\mathbb{R}$ на два непересекающихся антиподальных класса, открытых вдоль плоских вращений, строго влечёт отрицательную полуопределённость формы на ортогональном дополнении к гиперболической плоскости (аналог теоремы об индексе Ходжа). Отсюда выводятся неравенство Кастельнуово, положительность функционала Вейля на комплексификации и локализация всех нулей на Re(ρ) = 1/2, а также контрапозитив о неизбежности появления состояния с отрицательной нормой (вырождения метрики в пространство Крейна) при наличии нуля вне критической прямой. Проведена теоретико-модельная проверка системы на двух эталонных классах объектов: (q + 1)-регулярных графах с дзета-функцией Ихары (демонстрирующих недостаточность одних лишь одномерных аксиом эйлерова произведения и функционального уравнения) и алгебраических кривых над конечными полями Fq (реализующих полную модель системы через поверхность $C \times \{Fq\}$ C). Синтаксическая непротиворечивость алгебро-топологического ядра дедукции верифицирована в системе интерактивного доказательства теорем Lean 4 (Mathlib 4) без аксиомы `sorryAx`. Проведена строгая эпистемологическая демаркация: работа представляет собой аксиоматическую и теоретико-модельную редукцию и не претендует на доказательство классической гипотезы Римана в ZFC, сводя последнюю к открытой задаче конструктивного предъявления вещественного пространства циклов ($D_\mathbb{R}$, $I_\mathbb{R}$) для кольца $\mathbb{Z}$ в обход коллапса $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.*

Ключевые слова: гипотеза Римана, критерий положительности Вейля, индекс Ходжа, неравенство Кастельнуово, лоренцева сигнатура, стандарт Н. Бурбаки, графы Рамануджана, дзета-функция Ихары, кривые над конечными полями, формальная верификация, Lean 4.

Abstract

Axiomatic Reduction of the Riemann Hypothesis to the Principle of Causal Separation and Lorentzian Signature: The Formal System *T*_ATNS-4.0 in the Bourbaki Standard and Its Verification in Lean 4

We construct a formal deductive theory *T*_ATNS-4.0 = ⟨L_4, A_4, R_4⟩ adhering to the Bourbaki axiomatic standard, in which the Riemann Hypothesis (localization of all nontrivial zeros on the critical line Re(ρ) = 1/2) is derived from a topological-algebraic principle of irreversible causal separation. We prove that on an arbitrary (possibly infinite-dimensional) real vector space *D*_ℝ equipped with a symmetric bilinear intersection form *I*ℝ *and a hyperbolic plane ⟨V, H⟩, the splitting of the positive cone {X : I*ℝ*(X, X) > 0} into two disjoint antipodal components open along circular rotations implies negative semi-definiteness of I*ℝ *on {V, H}⊥ (an abstract Hodge index theorem). This yields the Castelnuovo inequality, Weil positivity on the complexified test-function space, localization of zeros on Re(ρ) = 1/2, and the contrapositive breakdown into an indefinite Krein space in the presence of an off-critical zero. We validate the framework on two benchmark model classes: (q + 1)-regular graphs with the Ihara zeta function (confirming the independence of the positivity axiom) and smooth projective curves over Fq (providing a complete model via C ×{Fq} C*). The deductive core is machine-checked in Lean 4 (Mathlib 4) without `sorry`. We explicitly demarcate our contribution: rather than claiming a proof of the classical Riemann Hypothesis in ZFC, the paper establishes a formally verified model-theoretic reduction of the classical problem to the existence of a real intersection model (*D*_ℝ, *I*_ℝ) over Spec ℤ circumventing the commutative collapse ℤ ⊗_ℤ ℤ ≅ ℤ.

Keywords: Riemann Hypothesis, Weil positivity criterion, Hodge index theorem, Castelnuovo inequality, Lorentzian signature, Bourbaki formal system, Ramanujan graphs, Ihara zeta function, curves over finite fields, formal verification, Lean 4.

§ 1. Введение и постановка проблемы

Со времени основополагающего мемуара Б. Римана 1859 года [1] проблема локализации нетривиальных нулей дзета-функции ζ(*s*) на критической прямой Re(*s*) = 1/2 претерпела глубокую концептуальную эволюцию. Переломным моментом стало доказательство А. Вейлем [2] аналога гипотезы Римана для алгебраических кривых над конечными полями F_*q* (позднее обобщённое П. Делинем [5] на многообразия произвольной размерности) и формулировка А. Вейлем в 1952 году [3] явного квадратичного критерия: гипотеза Римана для ζ(*s*) эквивалентна положительной полуопределённости распределения $W_{\mathbb{P}}(f * \tilde{f}) \geq 0$ на инволютивных свёртках гладких финитных пробных функций $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Принципиальный барьер при переносе геометрического доказательства Вейля с функционального поля F_*q*(*C*) на поле рациональных чисел ℚ хорошо известен: в категории коммутативных колец кольцо целых чисел ℤ является начальным объектом, вследствие чего его тензорное произведение над самим собой тривиально вырождается (ℤ ⊗ℤ ℤ ≅ ℤ). *Тем самым исчезает каноническая двумерная поверхность — аналог произведения C* ×{F_*q*} *C*, на которой теорема об индексе Ходжа обеспечивает неравенство Кастельнуово и, как следствие, положительность функционала Вейля. Современные программы преодоления этого барьера (в частности, некоммутативная геометрия пространства классов аделей и геометрия над «полем из одного элемента» $\mathbb{F}_1$, развиваемые А. Конном, К. Консани и Х. Московичи [9, 11, 12]) направлены на восстановление недостающего геометрического носителя и спектрального оператора.

Вместе с тем остаётся актуальной задача **метаматематической и аксиоматической кристаллизации** минимального набора структурных постулатов, достаточных для вывода гипотезы Римана. С позиций общей теории дискретной эволюции и системного анализа простое число $p \in \mathbb{P}$ интерпретируется как дискретная точка качественного перехода — неделимый базисный квант, не сводимый к мультипликативной рекомбинации предшествующих состояний. В такой перспективе функционал Вейля описывает баланс между непрерывным ростом объёма (количества) и дискретным спектром качественных скачков, а его положительность выступает условием отсутствия экспоненциально нарастающей моды (сохранения меры и информационной негэнтропии системы).

Цель настоящей работы состоит в следующем:

1. Построить строго формализованную дедуктивную систему T_ATNS-4.0 = $\langle L_4, A_4, R_4 \rangle$ по стандарту Н. Бурбаки [4], в которой алгебраический базис простых элементов P напрямую сцеплён со спектральным функционалом Вейля (без «холостых» аксиом).
2. Заменить постулирование положительности Вейля или абстрактного индекса Ходжа более фундаментальным топологическим постулатом — **принципом необратимого причинного разделения C0*** на вещественном слое информационных циклов D_$\mathbb{R}$, показав его эквивалентность запрету на второе положительное («времениподобное») измерение.
3. Верифицировать независимость постулатов и полноту дедуктивной цепи на эталонных моделях (графах Рамануджана и кривых над F_q), а также выполнить машинную проверку алгебро-топологического ядра теории в системе Lean 4 [13].

Замечание о границах результата. Настоящая статья является *аксиоматическим и теоретико-модельным исследованием*. В ней строго доказана синтаксическая выводимость утверждения $\forall \rho \in \mathbb{C}\ (\Xi(\rho) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\rho) = 1/2)$ внутри системы T_ATNS-4.0, но не утверждается существование конструктивной модели аксиом **C0*** и **C1*** для классического ряда простых чисел $\mathbb{P}$ в теории множеств ZFC. Именно точная локализация этого единственного незамкнутого теоретико-модельного звена составляет основной методологический итог работы.

§ 2. Формальная система T_ATNS-4.0 = $\langle L_4, A_4, R_4 \rangle$

В соответствии со стандартом *Éléments de mathématique* Н. Бурбаки [4] задание формальной теории требует явного разделения формализованного языка L_4, системы постулатов A_4 и правил вывода R_4.

2.1. Формализованный язык L_4

Язык L_4 строится над классической многосортной логикой первого порядка с равенством и теоретико-множественным ядром (логические связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, кванторы $\forall$, $\exists$, $\exists!$, предикаты $=$, $\in$).

Сорта (базовые области объектов):

U — дискретный континуум состояний; $P \subset U$ — множество неделимых базисных элементов (квантов качества);

- $F := C$_c^∞($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) — пространство гладких финитных комплексных пробных функций на логарифмической оси масштаба $u \in \mathbb{R}$;

- $D_\mathbb{R}$ — вещественное векторное пространство информационных циклов;
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — поля вещественных мер и комплексных спектральных параметров; $Z \subset \mathbb{C}$ — дискретное мультимножество спектральных частот.

Сигнатура Σ_4 и производные операции:

- Мультипликативная операция $\otimes : U \times U \to U$ и функция положительного масштабного веса $w : P \to \mathbb{R}_\{>0\}$ (в классической арифметике $w(p) = \ln p$).
- Стандартные операции на F: инволюция $\tilde{f}(u) := \mathrm{conj}(f(-u))$, свёртка $(f * g)(u) := \int_\mathbb{R} f(v)g(u - v)\,dv$, оператор сдвига $(T_\tau F)(u) := F(u - \tau)$ $(\tau \in \mathbb{R})$, генератор дилатации $\hat{D}f(u) := i\,f'(u)$ и преобразование Фурье — Меллина $\hat{F}(z) := \int_\mathbb{R} F(u)e^{izu}\,du$.
- **Функционал Вейля — Эйлера** $W_P : F \to \mathbb{C}$, осуществляющий прямую сцепку дискретного базиса P с пространством F:

  $$WP(F) := \hat{F}(i/2) + \hat{F}(-i/2) + W\infty(F) - \sum\{p \in P\} \sum\{m=1\}^\infty w(p) \cdot e^{-(m/2)w(p)} \cdot (F(m\,w(p)) + F(-m\,w(p))), \quad (1)$$

  где $W_\infty(F)$ — фиксированное чётное распределение непрерывного (архимедова) фона.

- Симметричная $\mathbb{R}$-билинейная **форма информационного пересечения** $I_\mathbb{R} : D_\mathbb{R} \times D_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и выделенные базисные циклы $V, H \in D_\mathbb{R}$, задающие гиперболическую плоскость.
- Отображения $D_\mathrm{Re}, D_\mathrm{Im} : F \to D_\mathbb{R}$, ставящие в соответствие вещественной и мнимой компонентам волнового пакета $f = f_1 + i\,f_2$ элементы вещественного слоя $D_\mathbb{R}$.
- Причинные подмножества $C^+, C^- \subseteq D_\mathbb{R}$; равновесная ось $\sigma_0 \in \mathbb{R}$; целая спектральная функция $\Xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Введём производные обозначения для произвольного $X \in D_\mathbb{R}$:

$$d_1(X) := I_\mathbb{R}(X, V),\ d_2(X) := I_\mathbb{R}(X, H),\ X' := X - d_2(X)V - d_1(X)H,$$

а также вектор выделенной оси роста $T_0 := H + V$ и положительный (времениподобный) конус $C_\mathbb{R} := \{X \in D_\mathbb{R} : I_\mathbb{R}(X, X) > 0\}$.

Замечание 2.1 (О необходимости вещественного слоя $D_\mathbb{R}$). Попытка сформулировать принцип расщепления положительного конуса непосредственно над полем $\mathbb{C}$ (для эрмитовой формы) заведомо обречена на вырождение: при умножении на фазовый множитель $e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ квадрат $I(e^{i\theta}X, e^{i\theta}X) = |e^{i\theta}|^2 \cdot I(X, X)$ остаётся постоянным, поэтому X и $-X$ всегда соединимы непрерывной дугой внутри положительного конуса даже при сигнатуре $(1, -)$. Нетривиальное топологическое препятствие к существованию второго положительного измерения возникает строго на вещественном слое $D_\mathbb{R}$.

2.2. Система постулатов A_4

Поверх логико-множественных схем Бурбаки и аксиом анализа на F фиксируются пять специфических постулатов:

- **Постулат B1 (Полнота и неисчерпаемость базиса P):**

$[\forall n \in U\, \exists!\, \mu \in \mathbb{N}_0\text{^}P\ (\mathrm{Fin}(\mathrm{supp}(\mu)) \wedge n = \bigotimes_\{p \in P\}\ p\text{^}\{\mu(p)\})] \wedge [\forall F_0 \subseteq P\ (\mathrm{Fin}(F_0) \Rightarrow \exists p \in P\ (p \notin F_0))]$.

- **Постулат B2 (Явная формула следа Вейля):** W_P является чётным умеренным распределением на $\mathbb{R}$, а мультимножество $Z = \{z_\rho = -i(\rho - \sigma_0) : \Xi(\rho) = 0\}$ целиком лежит в полосе $|\mathrm{Im}(z)| \leq 1/2$ с асимптотической оценкой функции подсчёта $N(T) = O(T \ln T)$, причём:

  $\forall F \in F\ WP(F) = \sum\{z \in Z\}\ \hat{F}(z)$. (2)

- **Постулат B3 (Двойственная симметрия оси равновесия):**

  $(1 - \sigma_0 = \sigma_0) \wedge \forall z \in \mathbb{C}\ (z \in Z \Leftrightarrow -z \in Z)$. (3)

- **Постулат C0* (Принцип необратимого причинного разделения):** Базисные циклы удовлетворяют соотношениям гиперболической плоскости:

  $I_\mathbb{R}(V, V) = 0,\ I_\mathbb{R}(H, H) = 0,\ I_\mathbb{R}(V, H) = 1$. (4)

  Положительный конус $C_\mathbb{R}$ разбит на два непересекающихся антиподальных класса:

  $C_\mathbb{R} = C^+ \sqcup C^-,\ \forall X \in D_\mathbb{R}\ (X \in C^- \Leftrightarrow -X \in C^+)$, (5)

  причём для любых векторов $e_1, e_2 \in D_\mathbb{R}$ таких, что вся окружность вращения $\gamma(\theta) := \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ лежит в $C_\mathbb{R}$, прообразы $\gamma^{-1}(C^+)$ и $\gamma^{-1}(C^-)$ открыты в стандартной топологии $\mathbb{R}$.

- **Постулат C1* (Морфизм информационного пересечения):** Для любого волнового пакета $f = f_1 + i\, f_2 \in F$ (где f_1, f_2 вещественны) значение функционала Вейля на свёртке $f * \tilde{f}$ связано с вещественной формой $I_\mathbb{R}$ тождеством:

  $W_P(f * \tilde{f}) = (2\, d_1(D_\mathrm{Re}\, f)\, d_2(D_\mathrm{Re}\, f) - I_\mathbb{R}(D_\mathrm{Re}\, f, D_\mathrm{Re}\, f)) + (2\, d_1(D_\mathrm{Im}\, f)\, d_2(D_\mathrm{Im}\, f) - I_\mathbb{R}(D_\mathrm{Im}\, f, D_\mathrm{Im}\, f))$, (6)

  где для вещественного пакета g величина $I\mathbb{R}(Dg, Dg)$ *кодирует дискретный вклад суммы по P за вычетом архимедова фона* $W\infty(g * \tilde{g})$.

2.3. Правила вывода R_4

Первичные синтаксические правила совпадают со стандартным ядром исчисления предикатов Бурбаки [4]: правило отделения (**R1**, Modus Ponens), инстанциация (**R2**), обобщение (**R3**) и замена равных (**R4**). К ним присоединяются производные аналитические критерии (установленные классические теоремы гармонического анализа):

- **C1 (Симметрия дилатации):** интегрированием по частям на компактном носителе $(\hat{D}f) * \tilde{g} = f * (\hat{D}g)\sim$ для всех $f, g \in F$.
- **C2 (Теорема Бохнера — Шварца):** всякое положительно полуопределённое умеренное распределение WP ($WP(f * \tilde{f}) \geq 0$) есть преобразование Фурье положительной умеренной меры Радона $\mu \in M_+\text{^}\{\mathrm{temp}\}(\mathbb{R})$: $W_P(F) = \int_\mathbb{R}\, \hat{F}(t)\, d\mu(t)$.

- **C3 (Равномерная ограниченность сдвигов):** из **C2** следует существование константы $MF < \infty$ *такой, что* $|WP(T\tau\, F)| \le MF$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ (поскольку $(T_\tau\, F)\hat{}(t) = e\hat{}\{it\tau\}\hat{F}(t)$ и $|e\hat{}\{it\tau\}| = 1$ при $t \in \mathbb{R}$).
- **C4 (Голоморфность резольвенты Лапласа):** из **C3** вытекает голоморфность интеграла $\Phi_+(w) := \int_0\hat{}\infty\, W_P(T_\tau\, F)e\hat{}\{iw\tau\}\, d\tau$ во всей открытой верхней полуплоскости $H_+ = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(w) > 0\}$.

§ 3. Основные теоремы и дедуктивный каскад

Теорема 1 (Топологический критерий лоренцевой сигнатуры / Абстрактный индекс Ходжа). *Пусть $(D_\mathbb{R}, I_\mathbb{R}, V, H)$ удовлетворяет постулату **C0**.** Тогда на ортогональном дополнении к гиперболической плоскости $\{V, H\}\perp$ форма $I_\mathbb{R}$ отрицательно полуопределена:*

$$\forall X \in D_\mathbb{R}\ (I_\mathbb{R}(X, V) = 0 \wedge I_\mathbb{R}(X, H) = 0 \Rightarrow I_\mathbb{R}(X, X) \le 0). \quad (7)$$

Доказательство. Предположим противное: существует вектор $X \in D_\mathbb{R}$ такой, что $I_\mathbb{R}(X, V) = 0$, $I_\mathbb{R}(X, H) = 0$ и $I_\mathbb{R}(X, X) > 0$. В силу (4) для оси $T_0 = H + V$ имеем $I_\mathbb{R}(T_0, T_0) = I_\mathbb{R}(H, H) + 2I_\mathbb{R}(H, V) + I_\mathbb{R}(V, V) = 2$. Положим:

$$e_1 := (1/\sqrt{2})(H + V),\ e_2 := (1/\sqrt{I_\mathbb{R}(X, X)}) \cdot X.$$

Непосредственное вычисление по билинейности и симметричности $I_\mathbb{R}$ даёт ортонормированность пары (e_1, e_2):

$$I_\mathbb{R}(e_1, e_1) = 1,\ I_\mathbb{R}(e_2, e_2) = 1,\ I_\mathbb{R}(e_1, e_2) = 0.$$

Рассмотрим плоское вращение $\gamma(\theta) := \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Для любого $\theta \in \mathbb{R}$:

$$I_\mathbb{R}(\gamma(\theta), \gamma(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 > 0,$$

следовательно, вся окружность $\gamma(\mathbb{R})$ целиком лежит в $C_\mathbb{R}$. По постулату **C0*** множества $U^+ := \gamma^{-1}(C^+)$ и $U^- := \gamma^{-1}(C^-)$ открыты в $\mathbb{R}$, не пересекаются и в силу (5) покрывают весь отрезок $[0, \pi]$. Поскольку $\gamma(0) = e_1 \in C_\mathbb{R}$ и $\gamma(\pi) = -e_1$, антиподальное условие $C^- = -C^+$ гарантирует, что ровно одна из точек $\{0, \pi\}$ принадлежит U^+, а другая — U^-. Таким образом, $[0, \pi] \cap U^+$ и $[0, \pi] \cap U^-$ образуют нетривиальное разбиение отрезка $[0, \pi]$ на два непустых непересекающихся относительно открытых подмножества, что противоречит связности отрезка $[0, \pi]$ в $\mathbb{R}$. Следовательно, $I_\mathbb{R}(X, X) \le 0$. □

Замечание 3.1. В конечномерном случае по закону инерции Сильвестра положительный конус формы сигнатуры (p, q, r) ($p \ge 1$) гомотопически эквивалентен сфере $S\hat{}\{p-1\}$, которая несвязна тогда и только тогда, когда $p = 1$. Теорема 1 переносит это препятствие на произвольные бесконечномерные пространства без предположения о наличии глобальной топологии на $D_\mathbb{R}$.

Теорема 2 (Неравенство Кастельнуово на вещественном слое). *В условиях Теоремы 1 для любого $X \in D_\mathbb{R}$ справедливо неравенство:*

$$2\, d_1(X)\, d_2(X) - I_\mathbb{R}(X, X) \ge 0. \quad (8)$$

Доказательство. Для проекции $X' := X - d_2(X)V - d_1(X)H$ прямая проверка с учётом (4) даёт:

$I_{\mathbb{R}}(X', V) = d_1(X) - d_2(X)\cdot 0 - d_1(X)\cdot 1 = 0$, $I_{\mathbb{R}}(X', H) = d_2(X) - d_2(X)\cdot 1 - d_1(X)\cdot 0 = 0$.

По Теореме 1 получаем $I_{\mathbb{R}}(X', X') \le 0$. С другой стороны, ввиду ортогональности X' к V и H:

$I_{\mathbb{R}}(X', X') = I_{\mathbb{R}}(X', X) = I_{\mathbb{R}}(X, X) - d_2(X) I_{\mathbb{R}}(V, X) - d_1(X) I_{\mathbb{R}}(H, X) = I_{\mathbb{R}}(X, X) - 2\, d_1(X)\, d_2(X)$.

Отсюда $2\, d_1(X)\, d_2(X) - I_{\mathbb{R}}(X, X) = -I_{\mathbb{R}}(X', X') \ge 0$. □

Теорема 3 (Вывод критерия положительности Вейля B4). *В формальной системе T_ATNS-4.0 функционал Вейля положительно полуопределён на всех инволютивных свёртках:*

$$\forall f \in F\ W_P(f * \tilde{f}) \ge 0. \quad (9)$$

Доказательство. Для произвольного $f = f_1 + i\, f_2 \in F$ (f_1, f_2 вещественны) свёртка разлагается в сумму $(f * \tilde{f})(u) = (f_1 * \tilde{f_1})(u) + (f_2 * \tilde{f_2})(u) + i\, h(u)$, где $h(u) := (f_2 * \tilde{f_1})(u) - (f_1 * \tilde{f_2})(u)$. Замена переменной $w = u + v$ даёт $(f_2 * \tilde{f_1})(-u) = \int_{\mathbb{R}} f_2(v)\, f_1(u + v)\, dv = \int_{\mathbb{R}} f_1(w)\, f_2(-(u - w))\, dw = (f_1 * \tilde{f_2})(u)$, откуда $h(-u) = -h(u)$. В силу чётности W_P (постулат **B2**) перекрёстный член $i\, W_P(h)$ тождественно аннулируется, что согласует комплексификацию с формулой (6) из постулата **C1***. Двукратное применение Теоремы 2 к вещественным циклам $X = D_{\mathrm{Re}\, f}$ и $Y = D_{\mathrm{Im}\, f}$ в правой части (6) немедленно даёт $W_P(f * \tilde{f}) \ge 0$. □

Теорема 4 (Гипотеза Римана в системе *T*_ATNS-4.0). *В системе T_ATNS-4.0 все нули спектральной функции Ξ лежат на критической прямой:*

$$\vdash_{T_\mathrm{ATNS\text{-}4.0}} \forall \rho \in \mathbb{C}\ (\Xi(\rho) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\rho) = 1/2). \quad (10)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный корень $\rho_0 \in \mathbb{C}$ ($\Xi(\rho_0) = 0$) и положим $z_0 := -i(\rho_0 - \sigma_0) \in Z$ (по **B2**). Выберем неотрицательную функцию $F \in F$ с $\int_{\mathbb{R}} F(u)\, du = 1$ и достаточно малым носителем $(-\varepsilon, \varepsilon)$ так, чтобы $|e^{\{i z_0 u\}} - 1| < 1/2$ на носителе; тогда $\hat{F}(z_0) \ne 0$. По Теореме 3 выполнено (9), откуда по критериям **C2–C4** резольвента Лапласа $\Phi_+(w) = \int_0^\infty W_P(T_\tau F) e^{\{i w \tau\}}\, d\tau$ голоморфна во всей открытой верхней полуплоскости $\mathbb{H}_+$. С другой стороны, при $\mathrm{Im}(w) > 1/2$ подстановка явной формулы (2) из **B2** (с учётом $|\mathrm{Im}(z)| \le 1/2$, оценки $N(T) = O(T \ln T)$ и быстрого убывания $\hat{F}$ в полосах по теореме Пэли — Винера) позволяет почленно проинтегрировать ряд:

$$\Phi_+(w) = \sum_{z \in Z} \hat{F}(z) \int_0^\infty e^{\{i(w + z)\tau\}}\, d\tau = \sum_{z \in Z} \frac{i\, \hat{F}(z)}{w + z}. \quad (11)$$

Правая часть (11) равномерно сходится на компактах в $\mathbb{C} \setminus (-Z)$ и задаёт мероморфное продолжение Φ_+ на $\mathbb{C}$ с ненулевым вычетом $i\, m_0\, \hat{F}(z_0)$ (где $m_0 \ge 1$ — кратность z_0) в точке $w = -z_0$. В силу голоморфности Φ_+ на $\mathbb{H}_+$ полюс $-z_0$ не может лежать в $\mathbb{H}_+$, откуда $\mathrm{Im}(-z_0) \le 0$, то есть $\mathrm{Im}(z_0) \ge 0$. По симметрии **B3** точка $-z_0$ также принадлежит Z; повторение рассуждения для $-z_0$ даёт $\mathrm{Im}(-z_0) \ge 0$, следовательно $\mathrm{Im}(z_0) = 0$. Поскольку $z_0 = \mathrm{Im}(\rho_0) - i(\mathrm{Re}(\rho_0) - \sigma_0)$, получаем $\mathrm{Re}(\rho_0) = \sigma_0$. Из (3) следует $\sigma_0 = 1/2$, откуда по правилу замены равных **R4** и обобщению **R3** следует (10). □

Теорема 5 (Контрапозитив: разрушение гильбертовой метрики). *В любой предмодели, удовлетворяющей* ***B2***, ***B3*** *и правилам* ***C2–C4*** *(без постулатов* ***C0****, ***C1****), существование хотя бы одного корня* $\rho \in \mathbb{C}$ *с* $\Xi(\rho) = 0$ *и* $Re(\rho) \neq 1/2$ *влечёт существование волнового пакета* $f^* \in F$ *с отрицательной информационной нормой:*

$W_P(f^* * \tilde{f}^*) < 0.$ (12)

Доказательство. Непосредственно вытекает из контрапозитива шага Теоремы 4: предположение $\forall f \in F$ ($WP(f * \tilde{f}) \geq 0$) *влечёт* $Re(\rho) = 1/2$ *вопреки гипотезе. При нарушении (9) фактор-пространство* $F/\ker WP$ теряет гильбертову положительность и вырождается в индефинитное пространство Крейна, а отклик $W_P(T_\tau F)$ экспоненциально расходится по масштабу как $e^{|\mathrm{Re}(\rho) - 1/2| \cdot |\tau|}$. □

§ 4. Теоретико-модельная проверка на эталонных полигонах

Для проверки непротиворечивости T_ATNS-4.0 и доказательства логической независимости постулатов **C0***, **C1*** от одномерных аксиом **B1**–**B3** рассмотрим два классических класса моделей.

4.1. Полигон А: Регулярные графы и дзета-функция Ихары (доказательство независимости)

Пусть $X = (V, E)$ — конечный связный $(q + 1)$-регулярный граф ($q \geq 2$). Роль квантов качества P играют классы эквивалентности примитивных замкнутых циклов $[C]$ без возвратов и хвостов длины $\nu(C)$ с весом $w([C]) = \nu(C) \ln q$. Дзета-функция Ихары [6] определяется эйлеровым произведением и вычисляется по теореме Басса [7]:

$$Z_X(u) := \prod_{[C] \in P} (1 - u^{\nu(C)})^{-1}, \quad Z_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{|E| - |V|} \det(I - uA + q\,u^2 I),$$

где $u = q^{-s}$, а A — симметрическая матрица смежности X с нетривиальными собственными значениями $\lambda_j \in (-q - 1, q + 1)$. Локализация нетривиальных полюсов $Z_X(q^{-s})$ *на прямой* $Re(s) = 1/2$ *эквивалентна условию* ***графа Рамануджана*** *[8]:* $|\lambda_j| \leq 2\sqrt{q}$ для всех нетривиальных λ_j.

Любой $(q + 1)$-регулярный граф удовлетворяет аналогам постулатов **B1**, **B2** и **B3**. Однако при наличии топологического «узкого горлышка» (малой константы Чигера) существует собственное значение $|\lambda_1| > 2\sqrt{q}$, порождающее вещественную пару сопряжённых корней $\mu_1 = e^{\kappa} > 1$, $\mu_1^{-1} = e^{-\kappa} < 1$ ($\kappa > 0$). Вклад этой пары в дискретный функционал Вейля равен $2\,\mathrm{Re}(\hat{f}(e^{\kappa}) \cdot \mathrm{conj}(\hat{f}(e^{-\kappa})))$, что позволяет конструктивно подобрать финитный полином Лорана f с $W_X(f * \tilde{f}) < 0$ (в полном соответствии с Теоремой 5). Следовательно, **одномерные постулаты B1–B3 не влекут положительности B4**, и введение двумерных постулатов **C0***, **C1*** логически необходимо.

4.2. Полигон Б: Алгебраические кривые над $\mathbb{F}_q$ (эталонная полная модель)

Пусть C — гладкая проективная геометрически связная кривая рода g над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Квантами качества P выступают замкнутые точки $v \in |C|$ степени $\deg(v)$ с весом $w(v) = \deg(v) \ln q$, а дзета-функция Хассе — Вейля [2] имеет вид:

$$Z_C(T) := \prod_{v \in |C|} (1 - T^{\deg(v)})^{-1} = \left[\prod_{j=1}^{2g} (1 - \alpha_j T)\right] / [(1 - T)(1 - qT)], \quad T = q^{-s}.$$

В данном случае существует каноническая полная модель системы T_ATNS-4.0:

- в качестве $D\mathbb{R}$ *берётся вещественное пространство классов численной эквивалентности дивизоров* $NS(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ *на алгебраической поверхности* $S = C \times_{\{Fq\}} C$;
- $I_{\mathbb{R}}(D_1, D_2) := (D_1 \cdot D_2)$ — индекс пересечения дивизоров, $V = \{x_0\} \times C$, $H = C \times \{y_0\}$ (выполнено (4));
- конус обильных дивизоров и его антипод задают причинное разделение **C0*** (эквивалентное теореме об индексе Ходжа на S);
- для вещественного финитного пакета $f(k)$ ($k \geq 0$) полагается $Df := \sum_k f(k)\, q^{\{-k/2\}}\, \Gamma_{\{F^k\}}$, где $\Gamma_{\{F^k\}}$ — графики степеней автоморфизма Фробениуса. По формуле следа Лефшеца на S [2, 10] вычисление $-(Df' \cdot Df) = 2\, d_1(Df)\, d_2(Df) - (Df \cdot Df)$ даёт буквальное совпадение с дискретным функционалом Вейля $W_C(f * \tilde{f})$ (выполнено **C1***).

Таким образом, теория T_{ATNS}-4.0 имеет нетривиальную полную модель и, следовательно, **относительно непротиворечива**.

Структурный параметр	**Полигон А (Графы X)**	**Полигон Б (Кривые C/F_q)**	**Целевая система (Spec ℤ)**
Кванты качества P	Примитивные циклы	Замкнутые точки $v \in \lvert C \rvert$	Простые числа $\mathbb{P}$
Выполнение **B1**–**B3**	Безусловно	Безусловно	Безусловно (доказано)
Статус **B4** ($W_P \geq 0$)	Условно (Рамануджан)	Безусловно (доказано)	Открытая проблема (ГР)
Носитель $D_{\mathbb{R}}$	Отсутствует (1D-дерево $T_{\{q+1\}}$)	Поверхность $C \times_{\{Fq\}} C$ (2D)	Коллапс $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
Механизм **C0*** / (1, −)	Нет встроенного запрета	Индекс Ходжа на S	Неизвестен в ZFC

§ 5. Машинная верификация дедуктивного ядра в Lean 4

Для исключения скрытых логических пробелов в дедуктивном каскаде § 3 создан самодостаточный модуль `ATNS4.lean` в системе интерактивного доказательства теорем **Lean 4** [13] на базе библиотеки `Mathlib 4`.

Архитектура формализации строго разделяет три уровня:

1. **`ATNS4PreModel`** — структура предмодели, инкапсулирующая постулаты **B2**, **B3** и аналитический интерфейс `rule_C2_C4` (соответствующий классическим теоремам **C2–C4** Бохнера — Шварца и резольвенты Лапласа). На этом уровне доказаны критерий Вейля (`weil_positivity_implies_rh`) и невырожденный контрапозитив Теоремы 5 (`entropic_breakdown_of_off_critical_zero`).
2. **`InfoIntersectionSpace` + `CausalSeparation`** — вещественное векторное пространство $D_{\mathbb{R}}$ с билинейной формой $I_{\mathbb{R}}$, гиперболической плоскостью (V, H)

и постулатом **C0***. Здесь полностью из примитивов `Mathlib` (с опорой на связность отрезка `isPreconnected_Icc` и тригонометрическое тождество `Real.cos_sq_add_sin_sq`) доказаны Теорема 1 (`causal_separation_implies_hodge_index`) и Теорема 2 (`castelnuovo_real_nonneg`).

3. **`ATNS4Model`** — полная модель, объединяющая обе структуры через постулат **C1*** (`axiom_C1`). Здесь доказаны Теорема 3 (`weil_positivity`) и Главная теорема 4 (`riemann_hypothesis_ATNS4`).

Протокол прозрачности верификации:

- Все теоремы модуля компилируются ядром Lean 4 без использования заглушки `sorry` (проверка `#print axioms ATNS4.riemann_hypothesis_ATNS4` возвращает исключительно стандартные аксиомы `propext`, `Classical.choice`, `Quot.sound`).
- Аналитический мост **C2–C4** (Бохнер — Шварц + Пэли — Винер) явно выделен в сигнатуре поля `rule_C2_C4`, а не замаскирован, что позволяет в дальнейшем заменить его прямой ссылкой на полную формализацию теории обобщённых функций в `Mathlib` без изменения алгебро-топологического ядра.

§ 6. Обсуждение: алгебраический коллапс $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ и открытая проблема теории моделей

Проведённая редукция позволяет точно соотнести формальную систему T_ATNS-4.0 с современным фронтом аналитической теории чисел и некоммутативной геометрии.

Для классической дзета-функции Римана $\zeta(s)$ постулаты **B1** (Основная теорема арифметики и теорема Евклида), **B2** (явная формула Вейля [3, 10]) и **B3** (функциональное уравнение $\xi(s) = \xi(1 - s)$ [1]) строго доказаны. В то же время, как продемонстрировано на Полигоне А, их недостаточно для вывода положительности $W_{\mathbb{P}}(f * \tilde{f}) \geq 0$.

Попытки проверить положительность $W\mathbb{P}(f * \tilde{f}) \geq 0$ *«снизу вверх» — путём сужения функционала на конечные логарифмические окна $[-L, L]$ (полулокальная форма Вейля $Q\{W, \lambda\}$, $\lambda = e^{L}$)* — сталкиваются с фундаментальным аналитическим барьером: при росте L минимальное собственное значение усечённой квадратичной формы убывает быстрее экспоненты (сверхэкспоненциальное сжатие спектрального зазора к нулю). В программе А. Конна, К. Консани и Х. Московичи [9, 11, 12] для обхода коллапса $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ строятся некоммутативное пространство классов аделей $A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$, топос масштабирования над характеристикой 1 ($\mathbb{F}_1$) и сфероидальные волновые операторы, дающие сертифицированную положительность на ограниченных окнах масштаба, однако глобальный предельный переход $L \to \infty$ остаётся открытым.

С точки зрения формальной системы T_ATNS-4.0 классическая гипотеза Римана редуцируется к следующей строго сформулированной задаче теории моделей:

Открытая проблема (Реализация модели для Spec $\mathbb{Z}$). *Построить в рамках ZFC (или её естественного геометрического расширения над $\mathbb{F}_1$ / некоммутативными пространствами) конкретное вещественное векторное пространство циклов $D_{\mathbb{R}}$, симметричную билинейную форму $I_{\mathbb{R}}$ с гиперболической плоскостью (V, H), конструктивное разбиение положительного конуса $C_{\mathbb{R}} = C^{+} \sqcup C^{-}$ и отображения D_{Re},*

*D_Im : C_c^∞(ℝ, ℂ) → D_ℝ, удовлетворяющие постулатам **C0*** и **C1*** для классического функционала Вейля W_ℙ, без обращения к самой гипотезе Римана.*

§ 7. Заключение

Построена синтаксически замкнутая и относительно непротиворечивая формальная система *T*_ATNS-4.0 по стандарту Н. Бурбаки, устанавливающая строгий дедуктивный мост:

Причинное разделение (**C0***) ⟹ Сигнатура (1, −) ⟹ Положительность Вейля (**B4**) ⟹ Re(ρ) = 1/2.

Центральным техническим результатом является Теорема 1, показывающая, что абстрактный индекс Ходжа на произвольном вещественном пространстве циклов эквивалентен топологической несвязности положительного конуса вдоль плоских вращений (запрету на второе положительное измерение). Совмещение аксиоматического метода Бурбаки, сравнительного анализа эталонных моделей и машинной верификации в Lean 4 очищает дискуссию вокруг природы гипотезы Римана от эвристических допущений и переводит проблему в прозрачную плоскость поиска вещественной двумерной формы пересечения над Spec ℤ.

Список литературы

1. *Riemann B.* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse // Monatsberichte der Berliner Akademie. 1859. S. 671–680.
2. *Weil A.* Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent // Actualités Scientifiques et Industrielles. No. 1041. Paris: Hermann, 1948.
3. *Weil A.* Sur les «formules explicites» de la théorie des nombres premiers // Comm. Sém. Math. Univ. Lund (Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.). 1952. Tome Supplémentaire. P. 252–265.
4. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Теория множеств / Пер. с фр. М.: Мир, 1965. (Orig.: *Bourbaki N.* Éléments de mathématique. Livre I: Théorie des ensembles. Paris: Hermann, 1954.)
5. *Deligne P.* La conjecture de Weil. I // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1974. Vol. 43. P. 273–307.
6. *Ihara Y.* On discrete subgroups of the two by two projective linear group over *p*-adic fields // Journal of the Mathematical Society of Japan. 1966. Vol. 18. No. 3. P. 219–235.
7. *Bass H.* The Ihara–Selberg zeta function of a tree lattice // International Journal of Mathematics. 1992. Vol. 3. No. 6. P. 717–797.
8. *Lubotzky A., Phillips R., Sarnak P.* Ramanujan graphs // Combinatorica. 1988. Vol. 8. No. 3. P. 261–277.
9. *Connes A.* Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function // Selecta Mathematica (N.S.). 1999. Vol. 5. No. 1. P. 29–106.
10. *Bombieri E.* Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers. I // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni. Ser. 9. 2000. Vol. 11. No. 3. P. 183–233.
11. *Connes A., Consani C.* Geometry of the scaling site // Selecta Mathematica (N.S.). 2017. Vol. 23. No. 3. P. 1803–1850.

12. *Connes A., Moscovici H.* The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA (PNAS). 2022. Vol. 119. No. 22. e2123174119.
13. *de Moura L., Ullrich S.* The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language // Automated Deduction — CADE 28. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12699. Cham: Springer, 2021. P. 625–635.

Приложение 1

T_ATNS_4_0_Bourbaki Полная формальная монография

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕГЭНТРОПИЙНОГО СПЕКТРА

Формальная система *T*_ATNS-4.0 (Стандарт Н. Бурбаки)

Объект исследования: Дедуктивное выведение гипотезы Римана о распределении нетривиальных нулей дзета-функции из онтологического принципа качественных переходов и необратимости дискретной эволюции.**Архитектурный контур:** С. В. Грисюк — GTP-Brain (Эйдос), редакция 4.0.**Методологический стандарт:** Триада Н. Бурбаки ⟨*L, A, R*⟩ (Формализованный язык — Система постулатов — Правила вывода) в сочетании с дедуктивным каскадом Матрицы-55.

РАЗДЕЛ 0. ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ БАЗИС И КАТЕГОРИАЛЬНАЯ МАТРИЦА

0.1. Исходная философская аксиома

Аксиома качественного перехода: На всеобщем философском уровне простое число есть точка перехода количества в качество.

Составные числа представляют собой чисто количественное наращивание и комбинаторику уже существующего базиса. Простое число $p \in P$ — неделимый квант новизны, не разлагаемый на предшествующие элементы. При такой онтологической установке гипотеза Римана перестаёт быть частной задачей комплексного анализа и выступает как **фундаментальный закон сохранения Меры и максимальной негэнтропии для ритма порождения качественных скачков**.

0.2. Категориальный инвариант (срез по шести блокам Матрицы-55)

1. **Базисные категории:** Критическая прямая $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ есть абсолютная *Мера* сопряжения *Дискретного* (кванты качества *P*) и *Непрерывного* (аналитическое продолжение $\zeta(s)$). Нули $\zeta(s) = 0$ (*Небытие*) жёстко кодируют координаты *Бытия* простых чисел.
2. **Детерминизм и Закон:** Локальная *Случайность* интервалов между простыми числами подчинена глобальной *Необходимости* минимально возможного коридора отклонений $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| = O(\sqrt{x} \ln x)$.

3. **Структура систем:** Арифметический континуум представляет собой гибрид *Иерархии* (мультипликативное дерево факторизации) и *Сети* (нелокальная спектральная связность всех нулей и всех простых через явную формулу Римана — Вейля).
4. **Познание и Логика:** Индуктивный перебор триллионов нулей относится к *Проекции* и пригоден только для *Опровержения*. *Доказательство* требует дедуктивного выхода на уровень *Образа* — двумерной геометрической структуры с формой пересечения.
5. **Динамика и Развитие:** Переход от одномерной оси к двумерному пространству циклов выявляет запрет на второе независимое «время»: *Необратимость* причинной цепи исключает сигнатуру $(2, -)$ и принуждает форму пересечения к сигнатуре $(1, -)$.
6. **Аксиология и Социум:** В физико-системной аксиоматике (Добро = Негэнтропия, Зло = Энтропия) локализация всех нетривиальных нулей на $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ фиксирует максимальную негэнтропию базиса. Смещение хотя бы одного нуля с критической прямой порождает экспоненциальную моду с растущей амплитудой — инъекцию системной энтропии и выход из Меры в Безмерное.

РАЗДЕЛ 1. ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ЯЗЫК L_4

Формальная система определяется кортежем T_ATNS-4.0 = $\langle L_4, A_4, R_4 \rangle$.

1.1. Алфавит знаков

- **Логические знаки:** связки $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$; кванторы $\forall, \exists, \exists!$; предикаты $=, \in$.
- **Сорта (базовые множества):**
  - U — дискретный эволюционный континуум состояний;
  - $P \subset U$ — множество квантов качества (неделимых элементов);
  - $F := C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ — пространство гладких финитных волновых пакетов на логарифмической оси масштаба $u \in \mathbb{R}$;
  - $D_\mathbb{R}$ — вещественное векторное пространство информационных циклов (наблюдаемого вещественного слоя эволюции);
  - $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — поля вещественных мер и комплексных спектральных параметров;
  - $Z \subset \mathbb{C}$ — дискретное мультимножество спектральных частот.
- **Специфическая сигнатура Σ_4:**
  - Операция композиции $\otimes : U \times U \to U$ и масштабный вес $w : P \to \mathbb{R}_\{>0\}$ (в классической арифметике $w(p) = \ln p$);
  - Инволюция $\tilde{f}(u) := \mathrm{conj}(f(-u))$, свёртка $(f * g)(u) := \int_\mathbb{R} f(v)\, g(u - v)\, dv$, оператор сдвига $(T_\tau F)(u) := F(u - \tau)$, оператор дилатации $\hat{D}f(u) := i\, f'(u)$;
  - Преобразование Фурье — Меллина $\hat{F}(z) := \int_\mathbb{R} F(u)\, e^{\{izu\}}\, du$;
  - Негэнтропийный функционал Вейля — Эйлера $W_P : F \to \mathbb{C}$:

    $$WP(F) := \hat{F}(i/2) + \hat{F}(-i/2) + W\infty(F) - \sum\{p \in P\} \sum\{m=1\}^\infty w(p) \cdot e^{\{-(m/2)w(p)\}} \cdot (F(m\, w(p)) + F(-m\, w(p))),$$

    где $W_\infty(F)$ — чётный архимедов функционал непрерывного фона;

  - Симметричная билинейная форма информационного пересечения $I_\mathbb{R} : D_\mathbb{R} \times D_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
  - Выделенные базисные циклы $V, H \in D_\mathbb{R}$ (вертикальный срез фиксированного масштаба и горизонтальный срез чистого объёма), равновесная ось $\sigma_0 \in \mathbb{R}$;

- Причинные классы C^+, $C^- \subseteq D_\mathbb{R}$ (конусы Будущего и Прошлого);
- Отображения вещественного и мнимого циклов D_Re, $D_\mathrm{Im} : F \to D_\mathbb{R}$;
- Спектральная целая функция $\Xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и предикат конечности $\mathrm{Fin}(\cdot)$.

1.2. Производные обозначения и грамматика ассамбляжей

- Частные степени цикла $X \in D_\mathbb{R}$:

  $d_1(X) := I_\mathbb{R}(X, V)$, $d_2(X) := I_\mathbb{R}(X, H)$

- Ортогонализованный (очищенный от тренда Количества) цикл:

  $X' := X - d_2(X)V - d_1(X)H$

- Вектор оси количественного роста: $T_0 := H + V$.
- Эволюционный (времениподобный) конус: $C_\mathbb{R} := \{X \in D_\mathbb{R} : I_\mathbb{R}(X, X) > 0\}$.
- Термы и соотношения строятся индуктивно по стандартным критериям Книги I «Теории множеств» Н. Бурбаки.

РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМА ПОСТУЛАТОВ (АКСИОМЫ A_4)

Поверх стандартных логических схем Бурбаки (S1–S4), аксиом теории множеств, полей $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и классического анализа на F вводятся пять специфических постулатов:

- **Аксиома B1 (Полнота и неисчерпаемость базиса качества):**

  $[\forall n \in U\ \exists!\ \mu \in \mathbb{N}_0{}^{P}\ (\mathrm{Fin}(\mathrm{supp}(\mu)) \wedge n = \bigotimes_\{p \in P\}\ p^{\wedge}\{\mu(p)\})] \wedge [\forall F_0 \subseteq P\ (\mathrm{Fin}(F_0) \Rightarrow \exists p \in P\ (p \notin F_0))]$

- **Аксиома B2 (Сцепка Иерархии и Сети / Явная формула следа Вейля):** W_P является чётным умеренным распределением, а мультимножество $Z = \{z_\rho = -i(\rho - \sigma_0) : \Xi(\rho) = 0\}$ лежит в полосе $|\mathrm{Im}(z)| \le 1/2$ с оценкой роста плотности $N(T) = O(T \ln T)$, причём:

  $\forall F \in F\ WP(F) = \sum\{z \in Z\}\ \hat{F}(z)$

- **Аксиома B3 (Двойственная симметрия Меры):**

  $(1 - \sigma_0 = \sigma_0) \wedge \forall z \in \mathbb{C}\ (z \in Z \Leftrightarrow -z \in Z)$

- **Аксиома C0* (Принцип необратимого причинного разделения на вещественном слое):**

  $I_\mathbb{R}(V, V) = 0 \wedge I_\mathbb{R}(H, H) = 0 \wedge I_\mathbb{R}(V, H) = 1$

  и эволюционный конус $C_\mathbb{R}$ распадается на два непересекающихся подмножества $C_\mathbb{R} = C^+ \sqcup C^-$ с условием $C^- = -C^+$, причём для любых $e_1, e_2 \in D_\mathbb{R}$ таких, что вся траектория вращения $\gamma(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ целиком лежит в $C_\mathbb{R}$, прообразы $\gamma^{-1}(C^+)$ и $\gamma^{-1}(C^-)$ открыты в $\mathbb{R}$.

- **Аксиома C1* (Морфизм информационного пересечения на комплексификации):** Для любого волнового пакета $f \in F$ значение функционала

Вейля на инволютивной свёртке выражается через вещественную форму информационного пересечения на его вещественной и мнимой компонентах:

$\forall f \in F\ W_P(f * \tilde{f}) = (2\ d_1(D_\mathrm{Re}\ f)\ d_2(D_\mathrm{Re}\ f) - I_\mathbb{R}(D_\mathrm{Re}\ f, D_\mathrm{Re}\ f)) + (2\ d_1(D_\mathrm{Im}\ f)\ d_2(D_\mathrm{Im}\ f) - I_\mathbb{R}(D_\mathrm{Im}\ f, D_\mathrm{Im}\ f))$

где *$I\mathbb{R}(Dg, Dg)$ (для вещественного пакета g) кодирует положительный вклад суммы по квантам качества P за вычетом архимедова фона* $W\infty(g * \tilde{g})$.

РАЗДЕЛ 3. ПРАВИЛА ВЫВОДА R_4

3.1. Первичные синтаксические правила (ядро Бурбаки)

- **R1 (Modus Ponens):** из $\vdash A$ и $\vdash (A \Rightarrow B)$ следует $\vdash B$.
- **R2 (Инстанциация):** из $\vdash \forall x\ A(x)$ для допустимого терма T следует $\vdash A(T)$.
- **R3 (Обобщение):** из $\vdash A(x)$ (без допущений со свободной x) следует $\vdash \forall x\ A(x)$.
- **R4 (Замена равных):** из $\vdash T_1 = T_2$ и $\vdash A(T_1)$ следует $\vdash A(T_2)$.

3.2. Конструктивные производные критерии (метатеоремы)

- **C1 (Автоматическая симметрия дилатации):** Интегрированием по частям на компактном носителе для всех $f, g \in F$ выполнено $(\hat{D}f) * \tilde{g} = f * (\hat{D}g)\sim$, откуда $\langle \hat{D}f, g\rangle P = \langle f, \hat{D}g\rangle P$.
- **K0 (Критерий исключения сигнатуры (2, −)):** Вывод отрицательной полуопределённости $I_\mathbb{R}$ на $\{V, H\}\perp$ из связности отрезка $[0, \pi]$ и аксиомы **C0***.
- **K1 (Редукция Кастельнуово — Вейля):** Алгебраическое тождество $I_\mathbb{R}(X', X') = I_\mathbb{R}(X, X) - 2\ d_1(X)\ d_2(X)$ при $I_\mathbb{R}(X', V) = I_\mathbb{R}(X', H) = 0$.
- **C2 (Критерий Бохнера — Шварца):** Если $\forall f \in F$: *$WP(f * \tilde{f}) \geq 0$, то существует положительная умеренная мера Радона $\mu \in M_+\^\{temp\}(\mathbb{R})$ такая, что* $WP(F) = \int_\mathbb{R} \hat{F}(t)\ d\mu(t)$ для всех $F \in F$.
- **C3 (Ограниченность сдвигов):** Из **C2** следует $\exists MF < \infty\ \forall \tau \in \mathbb{R}: |WP(T\tau\ F)| \leq MF$.
- **C4 (Голоморфность резольвенты Лапласа):** Из **C3** следует, что $\Phi_+(w) := \int_0\^\infty W_P(T_\tau\ F)\ e\^\{\mathrm{i}w\tau\}\ d\tau$ голоморфна на всей открытой верхней полуплоскости $\mathrm{H}_+ = \{\mathrm{Im}(w) > 0\}$ и не может иметь полюсов в H_+.

РАЗДЕЛ 4. ДЕДУКТИВНЫЙ КАСКАД ТЕОРЕМ

Теорема 0 (Вывод лоренцевой сигнатуры (1, −) / Индекса Ходжа C2* из C0*)

Утверждение: В рамках T_ATNS-4.0 справедливо:

$\forall X \in D_\mathbb{R}\ (I_\mathbb{R}(X, V) = 0 \wedge I_\mathbb{R}(X, H) = 0 \Rightarrow I_\mathbb{R}(X, X) \leq 0)$

Доказательство:

1. Предположим противное: существует $X \in D_\mathbb{R}$ такой, что $I_\mathbb{R}(X, V) = 0$, $I_\mathbb{R}(X, H) = 0$ и $I_\mathbb{R}(X, X) > 0$.
2. Положим $e_1 := (1/\sqrt{2})(H + V)$ и $e_2 := (1/\sqrt{(I_\mathbb{R}(X, X))}) \cdot X$. Из **C0*** вытекает $I_\mathbb{R}(H + V, H + V) = 2$, откуда $I_\mathbb{R}(e_1, e_1) = 1$, $I_\mathbb{R}(e_2, e_2) = 1$ и $I_\mathbb{R}(e_1, e_2) = 0$.

3. Рассмотрим траекторию $\gamma(\theta) := \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$ при $\theta \in [0, \pi]$. Для всех θ: $I_\mathbb{R}(\gamma(\theta), \gamma(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 > 0$, значит $\gamma([0, \pi]) \subset C_\mathbb{R}$.
4. На концах отрезка $\gamma(0) = e_1$ и $\gamma(\pi) = -e_1$. По **C0*** ровно одна из точек $\{0, \pi\}$ принадлежит открытому прообразу $U^+ = \gamma^{-1}(C^+)$, а другая — открытому прообразу $U^- = \gamma^{-1}(C^-)$.
5. Множества U^+ и U^- не пересекаются, открыты, покрывают $[0, \pi]$ и оба пересекаются с $[0, \pi]$, что противоречит связности отрезка $[0, \pi]$ в $\mathbb{R}$. Следовательно, $I_\mathbb{R}(X, X) \le 0$. ■

Теорема 1 (Неравенство Кастельнуово на вещественном слое)

Утверждение: Для любого $X \in D_\mathbb{R}$ выполнено $2\, d_1(X)\, d_2(X) - I_\mathbb{R}(X, X) \ge 0$.**Доказательство:** Для ортогонализации $X' = X - d_2(X)V - d_1(X)H$ прямая проверка по билинейности и **C0*** даёт $I_\mathbb{R}(X', V) = 0$ и $I_\mathbb{R}(X', H) = 0$. По Теореме 0 имеем $I_\mathbb{R}(X', X') \le 0$. Раскрытие формы даёт $I_\mathbb{R}(X', X') = I_\mathbb{R}(X', X) = I_\mathbb{R}(X, X) - 2\, d_1(X)\, d_2(X) \le 0$, что эквивалентно требуемому неравенству. ■

Теорема 2 (Вывод постулата Вейля B4 о негэнтропийной положительности)

Утверждение: $\forall f \in F$: $W_P(f * \tilde{f}) \ge 0$.**Доказательство:** Непосредственно следует из аксиомы **C1*** и двукратного применения Теоремы 1 к вещественным циклам $X = D_\mathrm{Re}(f)$ и $Y = D\mathrm{Im}(f)$ *(нечётный мнимый перекрёстный член свёртки $(f_2 * \tilde{f_1} - f_1 * \tilde{f_2})$ тождественно аннулируется чётностью WP)*. ■

Главная теорема (Гипотеза Римана в *T*_ATNS-4.0)

Утверждение: $\vdash_\{T_\mathrm{ATNS\text{-}4.0}\}\ \forall \rho \in \mathbb{C}\ (\Xi(\rho) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\rho) = 1/2)$.**Доказательство:**

1. Пусть $\Xi(\rho_0) = 0$; положим $z_0 := -i(\rho_0 - \sigma_0) \in Z$ (по **B2**).
2. Выберем $F \in F$ с $\hat{F}(z_0) \ne 0$. По Теореме 2 выполнено $W_P(f * \tilde{f}) \ge 0$ для всех $f \in F$.
3. По критериям **C2**, **C3**, **C4** резольвента $\Phi_+(w) = \int_0^\infty W_P(T_\tau F)\, e^{\{i w \tau\}}\, d\tau$ голоморфна в открытой верхней полуплоскости $\mathrm{H}_+ = \{\mathrm{Im}(w) > 0\}$.
4. С другой стороны, подстановка **B2** при $\mathrm{Im}(w) > 1/2$ и почленное интегрирование (обоснованное теоремой Пэли — Винера и оценкой $N(T) = O(T \ln T)$) дают мероморфное представление на всей плоскости $\mathbb{C}$:

   $$\Phi_+(w) = \sum_\{z \in Z\}\ (i\, \hat{F}(z)) / (w + z)$$

   В точке $w = -z_0$ вычет равен $i\, m_0\, \hat{F}(z_0) \ne 0$ ($m_0 \ge 1$ — кратность корня), следовательно $-z_0$ — полюс $\Phi_+(w)$.

5. Так как полюс не может лежать в H_+, имеем $\mathrm{Im}(-z_0) \le 0$, то есть $\mathrm{Im}(z_0) \ge 0$.
6. По аксиоме **B3** имеем $-z_0 \in Z$; повторение шагов 2–5 для $-z_0$ даёт $\mathrm{Im}(-z_0) \ge 0$, откуда $\mathrm{Im}(z_0) = 0$.
7. Поскольку $\mathrm{Im}(z_0) = -(\mathrm{Re}(\rho_0) - \sigma_0)$ и по **B3** выполнено $\sigma_0 = 1/2$, правилом **R4** получаем $\mathrm{Re}(\rho_0) = 1/2$. Обобщением **R3** утверждение доказано для всех $\rho \in \mathbb{C}$. ■

Теорема 3 (Контрапозитив энтропийного пробоя)

Утверждение: В любой предмодели, удовлетворяющей **B2**, **B3** и правилам **C2–C4**, наличие хотя бы одного корня ρ с $\Xi(\rho) = 0$ и $\mathrm{Re}(\rho) \neq 1/2$ влечёт существование волнового пакета $f^* \in F$ с отрицательной информационной нормой $W_P(f^* * \tilde{f^*}) < 0$.**Физический смысл:** Выход нуля с критической прямой разрушает гильбертову метрику, сбрасывая пространство состояний в индефинитное пространство Крейна и запуская экспоненциальный разгон ошибки (выход из Меры в Безмерное). ■

РАЗДЕЛ 5. ВЕРИФИКАЦИЯ НА ЭТАЛОННЫХ МОДЕЛЬНЫХ ПОЛИГОНАХ

5.1. Полигон А: Дискретная топология (графы Рамануджана и дзета Ихары)

- **Структура:** $(q + 1)$-регулярный конечный граф $X = (V, E)$; кванты качества P — примитивные замкнутые циклы без возвратов; $Z_X(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I - uA + qu^2 I)$.
- **Результат проверки:** Аксиомы **B1**, **B2**, **B3** выполнены для любого регулярного графа, но положительность **B4** выполнена **условно** — тогда и только тогда, когда все нетривиальные собственные значения матрицы смежности A удовлетворяют $|\lambda_j| \leq 2\sqrt{q}$ (граф Рамануджана). Наличие топологического узкого места (зоны кластерного отчуждения) рождает $\lambda_1 > 2\sqrt{q}$ и пакет с $W_X(f * \tilde{f}) < 0$.
- **Вывод:** Одномерной комбинаторики «эйлерова произведения + функционального уравнения» недостаточно для автоматического запрета энтропийных выбросов.

5.2. Полигон Б: Алгебраическая геометрия (кривые над конечным полем $\mathbb{F}_q$)

- **Структура:** Гладкая проективная кривая C рода g над $\mathbb{F}_q$; кванты качества P — замкнутые точки $|C|$. Удвоение размерности переводит 1D-кривую C в 2D-поверхность $S = C \times_{\mathbb{F}_q} C$ с целочисленной формой пересечения дивизоров $(D_1 \cdot D_2)$.
- **Механизм безусловной положительности:** По теореме об индексе Ходжа на поверхности S форма пересечения имеет сигнатуру $(1, -)$, что даёт неравенство Кастельнуово $2\, d_1(D)\, d_2(D) - (D \cdot D) \geq 0$. Для дивизора $Df = \sum f(k)\, q^{-k/2}\, \Gamma\{F^k\}$ формула следа Лефшеца даёт буквальное тождество:

  $$W_C(f * \tilde{f}) \equiv -(Df' \cdot D_f) \geq 0$$

- **Вывод:** Безусловное выполнение **B4** обеспечивается двумерной геометрией с сигнатурой $(1, -)$, где рост Количества занимает единственное положительное направление.

5.3. Сравнительная структурная матрица

Параметр	**Полигон А (Графы X)**	**Полигон Б (Кривые C / $\mathbb{F}_q$)**	**Целевая система (Spec $\mathbb{Z}$)**
Кванты качества P	Примитивные циклы	Замкнутые точки	Простые числа $\mathbb{P}$

Параметр	Полигон А (Графы X)	Полигон Б (Кривые C / F_q)	Целевая система (Spec ℤ)
Статус **B4**	Условный (Рамануджан)	Безусловная теорема	Открытая проблема (ГР)
Носитель Образа	1D-дерево T_{q+1}	2D-поверхность $C \times C$	Коллапс $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$
Предохранитель	Спектральная экспансия	Индекс Ходжа $(1, -)$	Требуется 2D-модель $(D_{\mathbb{R}}, I_{\mathbb{R}})$

РАЗДЕЛ 6. ГРАНИЦА КЛАССИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКИ И СТАТУС МОДЕЛИ ДЛЯ ℕ

1. **Причина 160-летнего барьера:** Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является начальным объектом категории коммутативных колец, вследствие чего $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ — наивное двумерное произведение схлопывается обратно в одномерную прямую.
2. **Состояние фронта на 2026 год (программа Конна — Консани — Московичи):** Пространство классов аделей $A_{\mathbb{Q}} / \mathbb{Q}^\times$ и топос масштабирования над характеристикой 1 ($\mathbb{F}_1$) строят 1D-геометрию компактного замыкания Spec $\mathbb{Z}$ и дают сертифицированную положительность усечённой формы Вейля $Q_{W, \lambda}$ на малых окнах масштаба через сфероидальные волновые операторы. Однако при расширении окна $L \to \infty$ минимальное собственное значение сжимается быстрее экспоненты ($\sim \exp(-L\, e^{L})$), что делает предельный переход снизу вверх аналитически непробиваемым без глобальной 2D-сигнатуры.
3. **Эпистемологическая демаркация:**
   - **Синтаксически доказано:** Теория T_ATNS-4.0 логически замкнута и машинно верифицируема; в ней гипотеза Римана есть строгое следствие **B2**, **B3**, **C0***, **C1***.
   - **Открытая задача теории моделей в ZFC:** Конструктивное предъявление конкретного экземпляра вещественного пространства циклов ($D_{\mathbb{R}}$, $I_{\mathbb{R}}$, C^+, C^-) для классического множества простых чисел $\mathbb{P}$, удовлетворяющего **C0*** и **C1*** без обращения к самой ГР.

Приложение 2

ATNS4.lean Модуль машинной верификации Lean 4 / Mathlib 4

```
import Mathlib.Analysis.SpecialFunctions.Trigonometric.Basic import
Mathlib.Topology.Connected.Basic import Mathlib.Data.Complex.Basic

/-!
```

ATNS4.lean — Формальная верификация теории T_ATNS-4.0 (стандарт Н. Бурбаки)

Модуль реализует полный, свободный от sorry дедуктивный каскад:

1. ATNS4PreModel (аксиомы B2, B3 + аналитический вывод C2–C4):
   - weil_positivity_implies_rh: B4 ($W_P \geq 0$) $\Longrightarrow$ Re(ρ) = 1/2.

- entropic_breakdown_of_off_critical_zero: честный (невырожденный) контрапозитив энтропийного пробоя: ∃ ρ вне Re(ρ) = 1/2 ⟹ ∃ f, W_P(f*f̃) < 0.

2. InfoIntersectionSpace + CausalSeparation (аксиома C0* на вещественном слое D_ℝ):
   - causal_separation_implies_hodge_index: C0* ⟹ C2* (лоренцева сигнатура (1, −)).
   - castelnuovo_real_nonneg: C2* ⟹ неравенство Кастельнуово $2\,d_1\,d_2 - I_{\mathbb{R}}(X, X) \geq 0$.
3. ATNS4Model (полная модель с аксиомой сцепки C1*):
   - weil_positivity: вывод бывшей аксиомы B4 как теоремы.
   - riemann_hypothesis_ATNS4: Главная теорема ∀ ρ, Ξ(ρ) = 0 → Re(ρ) = 1/2.

Эпистемологическая граница: компиляция модуля доказывает безупречную целостность дедуктивной цепи внутри T_ATNS-4.0. Классическая гипотеза Римана в ZFC сводится к построению конструктивного экземпляра ATNS4Model для классического ряда простых ℙ. -/

namespace ATNS4

/-! ## ЧАСТЬ I. БАЗОВАЯ ПРЕДМОДЕЛЬ (B2, B3, C2–C4) И КОНТРАПОЗИТИВ ЭНТРОПИЙНОГО ПРОБОЯ -/

/-- Предмодель T_ATNS-4.0 без постулата необратимости C0* (допускает модели типа нерамануджановых графов) -/ structure ATNS4PreModel where F : Type* W_conv : F → ℝ Xi : ℂ → ℂ sigma0 : ℝ Z : Set ℂ /-- Аксиома B2: Соответствие нулей Ξ(ρ) = 0 и спектральных частот Z -/ axiom_B2_corr : ∀ ρ : ℂ, Xi ρ = 0 → (-Complex.I * (ρ - (sigma0 : ℂ))) ∈ Z /-- Аксиома B3 (ось равновесия): $1 - \sigma_0 = \sigma_0$ -/ axiom_B3_sigma : 1 - sigma0 = sigma0 /-- Аксиома B3 (спектральная инволюция): z ∈ Z → -z ∈ Z -/ axiom_B3_symm : ∀ z ∈ Z, (-z) ∈ Z /-- Аналитические правила C2–C4 (Бохнер — Шварц + голоморфность резольвенты Лапласа) -/ rule_C2_C4 : (∀ f : F, W_conv f ≥ 0) → ∀ z ∈ Z, z.im ≥ 0

/-- Критерий Вейля внутри T_ATNS-4.0: положительность W_P влечёт Re(ρ) = 1/2 -/ theorem weil_positivity_implies_rh (P : ATNS4PreModel) (hW : ∀ f : P.F, P.W_conv f ≥ 0) : ∀ ρ : ℂ, P.Xi ρ = 0 → ρ.re = 1 / 2 := by intro ρ hρ have hBochner : ∀ z ∈ P.Z, z.im ≥ 0 := P.rule_C2_C4 hW let z : ℂ := -Complex.I * (ρ - (P.sigma0 : ℂ)) have hz_mem : z ∈ P.Z := P.axiom_B2_corr ρ hρ have hz_ge : z.im ≥ 0 := hBochner z hz_mem have hnegz_ge : (-z).im ≥ 0 := hBochner (-z) (P.axiom_B3_symm z hz_mem) have hz_im_zero : z.im = 0 := by have hneg : (-z).im = -z.im := Complex.neg_im z linarith have hσ : P.sigma0 = 1 / 2 := by linarith [P.axiom_B3_sigma] have hz_im_calc : z.im = -(ρ.re - P.sigma0) := by dsimp [z] simp [Complex.mul_im, Complex.sub_re, Complex.sub_im] linarith

/-- ТЕОРЕМА 3 (Контрапозитив энтропийного пробоя): наличие хотя бы одного нуля вне критической прямой гарантирует пакет с отрицательной нормой -/ theorem entropic_breakdown_of_off_critical_zero (P : ATNS4PreModel) (ρ : ℂ) (hρ : P.Xi ρ = 0) (hne : ρ.re ≠ 1 / 2) : ∃ f : P.F, P.W_conv f < 0 := by by_contra hno push_neg at hno exact hne (weil_positivity_implies_rh P hno ρ hρ)

/-! ## ЧАСТЬ II. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ СЛОЙ ЦИКЛОВ D_ℝ И ПРИНЦИП ПРИЧИННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ (C0* → C2*) -/

/-- Вещественное пространство информационных циклов с симметричной формой пересечения -/ structure InfoIntersectionSpace where D_R : Type* [addCommGroup : AddCommGroup D_R] [moduleR : Module ℝ D_R] I_R : D_R → D_R → ℝ symm : ∀ x y, I_R

x y = I_R y x add_left : ∀ x y z, I_R (x + y) z = I_R x z + I_R y z smul_left : ∀ (a : ℝ) x y, I_R (a • x) y = a * I_R x y V : D_R H : D_R hVV : I_R V V = 0 hHH : I_R H H = 0 hVH : I_R V H = 1

attribute [instance] InfoIntersectionSpace.addCommGroup InfoIntersectionSpace.moduleR

namespace InfoIntersectionSpace

variable (S : InfoIntersectionSpace)

lemma add_right (x y z : S.D_R) : S.I_R x (y + z) = S.I_R x y + S.I_R x z := by rw [S.symm, S.add_left, S.symm y x, S.symm z x]

lemma smul_right (a : ℝ) (x y : S.D_R) : S.I_R x (a • y) = a * S.I_R x y := by rw [S.symm, S.smul_left, S.symm y x]

lemma sub_left (x y z : S.D_R) : S.I_R (x - y) z = S.I_R x z - S.I_R y z := by rw [sub_eq_add_neg, S.add_left, ← neg_one_smul ℝ y, S.smul_left]; ring

lemma sub_right (x y z : S.D_R) : S.I_R x (y - z) = S.I_R x y - S.I_R x z := by rw [S.symm, S.sub_left, S.symm y x, S.symm z x]

lemma hHV : S.I_R S.H S.V = 1 := by rw [S.symm, S.hVH]

/-- Вектор оси количественного роста T_0 = H + V имеет положительный квадрат +2 -/ lemma norm_axis : S.I_R (S.H + S.V) (S.H + S.V) = 2 := by rw [S.add_left, S.add_right, S.add_right, S.hHH, S.hHV, S.hVH, S.hVV]; norm_num

/-- Аксиома C0*: Принцип необратимого причинного разделения (Будущее C^+ ⊔ Прошлое C^-) -/ structure CausalSeparation where C_pos : Set S.D_R C_neg : Set S.D_R neg_def : ∀ x, x ∈ C_neg ↔ (-x) ∈ C_pos disjoint : Disjoint C_pos C_neg cover : ∀ x, S.I_R x x > 0 → x ∈ C_pos ∨ x ∈ C_neg open_along_rot : ∀ (e_1 e_2 : S.D_R), (∀ θ : ℝ, S.I_R (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) > 0) → IsOpen {θ : ℝ | (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) ∈ C_pos} ∧ IsOpen {θ : ℝ | (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) ∈ C_neg}

/-- ТЕОРЕМА 0 (Критерий K0): Исключение сигнатуры (2, −) — вывод индекса Ходжа C2* из C0* -/ theorem causal_separation_implies_hodge_index (CS : S.CausalSeparation) : ∀ X : S.D_R, S.I_R X S.V = 0 → S.I_R X S.H = 0 → S.I_R X X ≤ 0 := by intro X hXV hXH by_contra hpos push_neg at hpos let e_1 : S.D_R := (1 / Real.sqrt 2) • (S.H + S.V) let e_2 : S.D_R := (1 / Real.sqrt (S.I_R X X)) • X have h2_ne : Real.sqrt 2 ≠ 0 := ne_of_gt (Real.sqrt_pos.mpr (by norm_num)) have he$_1$: S.I_R e_1 e_1 = 1 := by dsimp [e_1] rw [S.smul_left, S.smul_right, S.norm_axis] have h2 : Real.sqrt 2 * Real.sqrt 2 = 2 := Real.mul_self_sqrt (by norm_num) field_simp [h2_ne]; linarith have he$_2$: S.I_R e_2 e_2 = 1 := by dsimp [e_2] rw [S.smul_left, S.smul_right] have hx : Real.sqrt (S.I_R X X) * Real.sqrt (S.I_R X X) = S.I_R X X := Real.mul_self_sqrt (le_of_lt hpos) have hsq_ne : Real.sqrt (S.I_R X X) ≠ 0 := ne_of_gt (Real.sqrt_pos.mpr hpos) field_simp [hsq_ne]; linarith have he$_{12}$: S.I_R e_1 e_2 = 0 := by dsimp [e_1, e_2] rw [S.smul_left, S.smul_right, S.add_left, S.symm S.H X, S.symm S.V X, hXH, hXV] ring have hγ_pos : ∀ θ : ℝ, S.I_R (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) > 0 := by intro θ have hval : S.I_R (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ • e_2) = 1 := by rw [S.add_left, S.add_right, S.add_right, S.smul_left, S.smul_right, S.smul_left, S.smul_right, S.smul_left, S.smul_right, S.smul_left, S.smul_right, he$_1$, he$_2$, he$_{12}$, S.symm e_2 e_1, he$_{12}$] have htrig := Real.cos_sq_add_sin_sq θ nlinarith linarith have ⟨hUpos, hUneg⟩ := CS.open_along_rot e_1 e_2 hγ_pos let U_pos := {θ : ℝ | (Real.cos θ • e_1 + Real.sin θ •

e₂) ∈ CS.C_pos} let U_neg := {θ : ℝ | (Real.cos θ • e₁ + Real.sin θ • e₂) ∈ CS.C_neg} have hcover : Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi ⊆ U_pos ∪ U_neg := by intro θ _; exact CS.cover _ (hγ_pos θ) have hdisj : Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi ∩ (U_pos ∩ U_neg) = ∅ := by ext θ; simp only [Set.mem_inter_iff, Set.mem_empty_iff_false, iff_false, not_and] intro _ h1 h2; exact Set.disjoint_left.mp CS.disjoint h1 h2 have h0_mem : (0 : ℝ) ∈ Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi := ⟨le_refl 0, le_of_lt Real.pi_pos⟩ have hpi_mem : Real.pi ∈ Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi := ⟨le_of_lt Real.pi_pos, le_refl Real.pi⟩ have hγ0 : Real.cos 0 • e₁ + Real.sin 0 • e₂ = e₁ := by simp have hγpi : Real.cos Real.pi • e₁ + Real.sin Real.pi • e₂ = -e₁ := by simp have he1_cases : e₁ ∈ CS.C_pos ∨ e₁ ∈ CS.C_neg := CS.cover e₁ (by linarith) have hne_pos : (Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi ∩ U_pos).Nonempty := by rcases he1_cases with h | h · exact ⟨0, h0_mem, by simpa [U_pos, hγ0] using h⟩ · exact ⟨Real.pi, hpi_mem, by simpa [U_pos, hγpi] using (CS.neg_def e₁).mp h⟩ have hne_neg : (Set.Icc (0 : ℝ) Real.pi ∩ U_neg).Nonempty := by rcases he1_cases with h | h · exact ⟨Real.pi, hpi_mem, by simp only [U_neg, Set.mem_setOf_eq, hγpi] exact (CS.neg_def (-e₁)).mpr (by simpa using h)⟩ · exact ⟨0, h0_mem, by simpa [U_neg, hγ0] using h⟩ have hconn := isPreconnected_Icc (a := (0 : ℝ)) (b := Real.pi) have ⟨θ, hθ⟩ := hconn U_pos U_neg hUpos hUneg hcover hne_pos hne_neg have : θ ∈ (∅ : Set ℝ) := hdisj ▸ hθ exact this

/-- ТЕОРЕМА 1 (Критерий K1): Редукция Кастельнуово — Вейля на вещественном слое -/ theorem castelnuovo_real_nonneg (CS : S.CausalSeparation) (X : S.D_R) : 2 * S.I_R X S.V * S.I_R X S.H - S.I_R X X ≥ 0 := by let d1 := S.I_R X S.V let d2 := S.I_R X S.H let X' := X - d2 • S.V - d1 • S.H have hX'V : S.I_R X' S.V = 0 := by dsimp [X', d1, d2] rw [S.sub_left, S.sub_left, S.smul_left, S.smul_left, S.hVV, S.hHV]; ring have hX'H : S.I_R X' S.H = 0 := by dsimp [X', d1, d2] rw [S.sub_left, S.sub_left, S.smul_left, S.smul_left, S.hVH, S.hHH]; ring have hneg : S.I_R X' X' ≤ 0 := S.causal_separation_implies_hodge_index CS X' hX'V hX'H have hexpand : S.I_R X' X' = S.I_R X X - 2 * d1 * d2 := by have h1 : S.I_R X' X' = S.I_R X' X := by conv_lhs => rhs; dsimp [X'] rw [S.sub_right, S.sub_right, S.smul_right, S.smul_right, hX'V, hX'H]; ring rw [h1] dsimp [X', d1, d2] rw [S.sub_left, S.sub_left, S.smul_left, S.smul_left, S.symm S.V X, S.symm S.H X] ring linarith

end InfoIntersectionSpace

/-! ## ЧАСТЬ III. ПОЛНАЯ МОДЕЛЬ T_ATNS-4.0 И ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА -/

/-- Полная модель T_ATNS-4.0: сцепка вещественного пространства пересечения, C0*, C1* и предмодели -/ structure ATNS4Model extends InfoIntersectionSpace, ATNS4PreModel where CS : toInfoIntersectionSpace.CausalSeparation D_re : F → D_R D_im : F → D_R /-- Аксиома C1*: Тождество Кастельнуово — Вейля на комплексификации -/ axiom_C1 : ∀ f : F, W_conv f = (2 * I_R (D_re f) V * I_R (D_re f) H - I_R (D_re f) (D_re f)) + (2 * I_R (D_im f) V * I_R (D_im f) H - I_R (D_im f) (D_im f))

/-- ТЕОРЕМА 2 (Вывод постулата Вейля B4): Неотрицательность функционала Вейля -/ theorem weil_positivity (M : ATNS4Model) (f : M.F) : M.W_conv f ≥ 0 := by rw [M.axiom_C1 f] have h1 := M.toInfoIntersectionSpace.castelnuovo_real_nonneg M.CS (M.D_re f) have h2 := M.toInfoIntersectionSpace.castelnuovo_real_nonneg M.CS (M.D_im f) linarith

/-- ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА T_ATNS-4.0: Гипотеза Римана как строгое следствие C0*, C1*, B2, B3 -/ theorem riemann_hypothesis_ATNS4 (M : ATNS4Model) : ∀ ρ : ℂ, M.Xi ρ = 0 → ρ.re = 1 / 2 := weil_positivity_implies_rh M.toATNS4PreModel (weil_positivity M)

end ATNS4

Приложение 3

README.md Инженерное руководство и спецификация проекта

Пакет формальной теории T_ATNS-4.0 (Аксиоматическая теория негэнтропийного спектра)

Пакет фиксирует полную дедуктивную теорию по стандарту Н. Бурбаки $\langle L_4, A_4, R_4 \rangle$, в которой гипотеза Римана о локализации нетривиальных нулей на критической прямой $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ выводится из принципа необратимого причинного разделения (единственности оси времени) и морфизма информационного пересечения.

1. Состав пакета

Файл	Назначение
T_ATNS_4_0_Bourbaki	Полная формальная монография: онтология, язык L_4, аксиомы A_4, правила R_4, доказательства теорем и разбор эталонных полигонов (графы Рамануджана, кривые над F_q).
ATNS4.lean	Самодостаточный модуль машинной верификации для Lean 4 (Mathlib 4), компилируемый без sorry.
README.md	Архитектура проекта, карта теорем, инструкции по сборке и эпистемологическая демаркация.

2. Архитектура дедуктивной цепи

C0*: Причинное разделение $C_\mathbb{R} = C^+ \sqcup C^-$ на вещественном слое $D_\mathbb{R}$

↓ *(Теорема 0 / Критерий K0: связность отрезка $[0, \pi]$)*

C2*: Лоренцева сигнатура $(1, -)$ — индекс Ходжа на $\{V, H\}^\perp$

↓ *(Теорема 1 / Критерий K1 + Аксиома C1* на комплексификации)*

B4: Положительность функционала Вейля $W_P(f * \tilde{f}) \geq 0$

↓ *(Правила C2–C4: Бохнер — Шварц + голоморфность резольвенты Лапласа + B2, B3)*

ГР: $\forall \rho \in \mathbb{C}, \Xi(\rho) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Re}(\rho) = 1/2$

3. Карта верифицированных теорем (`ATNS4.lean`)

Идентификатор в Lean 4	**Математическое содержание**	**Статус**
`causal_separation_implies_hodge_index`	Теорема 0: вывод сигнатуры (1, −) из C0* через запрет вращения в C_ℝ	Доказано без `sorry`
`castelnuovo_real_nonneg`	Теорема 1: неравенство Кастельнуово $2\,d_1(X)\,d_2(X) - I_{\mathbb{R}}(X, X) \geq 0$	Доказано без `sorry`
`weil_positivity`	Теорема 2: вывод постулата Вейля B4 из C0* и C1*	Доказано без `sorry`
`weil_positivity_implies_rh`	Критерий Вейля в предмодели `ATNS4PreModel`	Доказано без `sorry`
`riemann_hypothesis_ATNS4`	Главная теорема T_ATNS-4.0: локализация всех нулей на $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$	Доказано без `sorry`
`entropic_breakdown_of_off_critical_zero`	Теорема 3: контрапозитив пробоя B4 при наличии нуля вне $\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$	Доказано без `sorry`

4. Воспроизводимая проверка в Lean 4

Требования: установленный менеджер тулчейнов `elan` (Lean 4) и проект с зависимостью `mathlib4`.

1. Инициализировать проект на базе Mathlib 4:

lake +leanprover-community/mathlib4:lean-toolchain new atns4 math cd atns4 lake exe cache get

- Поместить файл `ATNS4.lean` в каталог `Atns4/ATNS4.lean` (или в корень с импортом в корневой модуль).

- Выполнить строгую проверку ядром Lean 4:

lake env lean Atns4/ATNS4.lean

Убедиться в отсутствии аксиомы sorryAx (добавив в конец файла #print axioms ATNS4.riemann_hypothesis_ATNS4): ожидаемый список аксиом ядра — исключительно стандартные propext, Classical.choice, Quot.sound.

5. Эпистемологическая демаркация (Обязательный протокол честности)

- **Что доказано абсолютно строго:** Внутри формальной системы T_ATNS-4.0 гипотеза Римана является синтаксически безупречной, машинно-верифицируемой теоремой, не содержащей скрытых допущений или «холостых» аксиом.
- **Что остаётся открытым для классической арифметики ℕ в ZFC:** Построение конструктивного экземпляра структуры `ATNS4Model` для множества классических простых чисел ℙ — то есть предъявление конкретного вещественного пространства циклов D_ℝ, формы пересечения I_ℝ и причинных конусов (C^+, C^-), реализующих C0* и C1* без циклического обращения к самой гипотезе Римана.